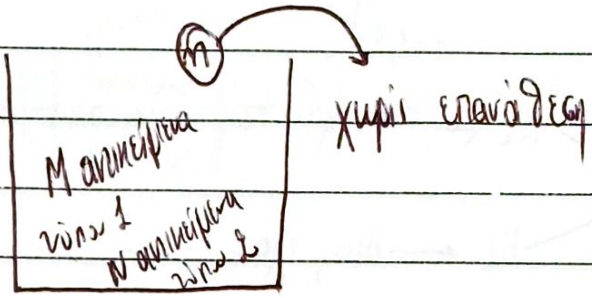
ΔΗΛΩΣΕΙΣ
15 Νοε - 29 Νοεμ

ΥΠΕΡΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Δειγματοληψία χωρίς επανάθεση (σε αντίθεση με τη διωνυμική)

Εκτίμηση αριθμού ψαριών λίμνης

π.χ.
M άνδρες
N γυναίκες



Ενδιαφέρον: πλήθος X των αντικειμένων τύπου I που περιέχονται στα n που επιλέχθηκαν

Η X είναι μια τ.μ με δυνατές τιμές $x=0,1,\dots,n$ (κατ' αρχήν)

Η X είναι διακριτή και έτσι αναζητώ τη σ.π p_X της X

ακριβώς x αντικείμενα τύπου I

$$p_X(x) \overset{op.}{=} P(X=x) = \boxed{\frac{\binom{M}{x}\binom{N}{n-x}}{\binom{M+N}{n}}}$$

Ερώτημα

Είναι p_X σ.π;

Ναι, γιατί ① $p_X(x)\ge 0$, $\forall x$

② $\sum_{x=0}^{n} P_X(x) = 1$

Ισχύει το (2) από τύπο Cauchy

$$\sum_{x=0}^{n} \binom{M}{x} \cdot \binom{N}{n-x} = \binom{M+N}{n}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Για να υφίστανται οι συνδυασμοί που εμφανίζονται στην P_X θα πρέπει $x \le M$ και $n-x \le N \Leftrightarrow n-N \le x$

Συγκεντρωτικά

γιατί $x=0,1,...,n$

$x \ge 0$ κ' $x \ge n-N \longrightarrow$ Άρα $x \ge \max\{0, n-N\}$

$x \le M$ κ' $x \le n \longrightarrow$ Άρα $x \le \min\{n, M\}$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η τυχαία μεταβλητή X λέγεται υπεργεωμετρική με παραμέτρους M, N και n φυσικούς με $n \le M+N$ αν οι δυνατές τιμές της τ.μ X είναι $\max\{0, n-N\} \le x \le \min\{n, M\}$ και η σ.π της τ.μ X δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{P_X(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N}{n-x}}{\binom{M+N}{n}}} \quad \text{για } \max\{0, n-N\} \le x \le \min\{n, M\}$$

Συμβολικά $\boxed{X \sim H_g(M, N, n)}$

SKAG

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω τ.μ. $X \sim Hg(M,N,n)$

"Όταν έχω μεγάλο πληθυσμό η υπεργεωμ. και η διωνυμική συμπεριφέρονται με τον ίδιο τρόπο"

Αν $M,N \to \infty$ και $\frac{M}{M+N} \to p \in (0,1)$

τότε $\boxed{\lim\limits_{M,N\to\infty} P_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}}$, $x=0,\dots,n$

Π.χ. Εφαρμογή της H_g σε προβλήματα εκτίμησης αριθμού ψαριών λίμνης

(Μοντέλων: Πιάνω - ~~Κάνω~~ Ξανά Πιάνω
capture-Recapture)

Σε λίμνη: υπάρχει ένας άγνωστος αριθμός U ψαριών

Ψαρεύονται M ψάρια, ~~όπου~~ σημαδεύονται με μπογιά και τοποθετούνται ξανά στη λίμνη. Μετά από κάποιο χρονικό διάστημα ψαρεύονται n ψάρια και παρατηρούμε ότι ακριβώς K (από τα n) είναι σημαδεμένα. Με βάση τα δεδομένα αυτά να εκτιμηθεί (προσεγγιστεί) ο άγνωστος αριθμός U ψαριών.

2ο Ψάρεμα

M σημαδεμένα

u-M ασημάδευτα

ψαρεύω → n χωρίς επανάθεση

⇓ παρατηρώ

K είναι σημαδεμένα

Έστω X πλήθος των σημαδεμένων ψαριών στα n

Τότε: $X \sim Hg(M, N-M, n)$

Άρα, $$\boxed{P_X(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}} \quad \forall\, x = 0, \dots, n$$

Ξέρω ότι στα n ακριβώς k είναι σημαδεμένα

Άρα, η $P_X(x)$ έχει τη μέγιστη της τιμή

Άρα, το N μπορεί να υπολογισεί από τη μεγιστοποίηση ως προς N της $P_X(k)$

ή από τη -"- -"- της $$\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

η οποία μεγιστοποιείται για $\boxed{N = \left\lfloor \frac{nM}{k} \right\rfloor}$

(1) Η σ.π της τ.μ X είναι:

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{a}{5} & x = 0, \pm 1, \pm 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

~~α)~~ $a = ?$ ~~β)~~ $F_X = ?$ γ) $P(1/2 < X \leq 2)$

$P(-1 \leq X \leq 1)$

$P(|X| \leq 1)$, $P(X > -1 \mid X \leq 1)$

$\parallel$

$P(-1 \leq X \leq 1)$

α) Αφού $P_X(x)$ σ.π

$$1 = \sum_{x} P_X(x) = \sum_{x=0,\pm1,\pm2} \frac{a}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{a=1}$$

β) $F_X(x) = P(X \le x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$-2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad \mathbb{R}$

Αν $x < -2$ τότε $F_X(x) = P(X \le x) = P(\emptyset) = 0$

$-2 \le x < -1$ $\quad F_X(x) = P(X=-2) = P_X(-2) = \frac{1}{5}$

$-2 \le x < 0$ $\quad F_X(x) =$

κοκ

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ 1/5, & -2 \le x < -1 \\ 2/5, & -1 \le x < 0 \\ 3/5, & 0 \le x < 1 \\ 4/5, & 1 \le x < 2 \\ 1 & x \ge 2 \end{cases}$$

γ) $P\left(\frac{1}{2} < X \le 2\right)$

ασκ. σ.π

$F_X(2) - F(1/2)$

$= 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

$P(X=1 \text{ ή } X=2) = P(X=1) + P(X=2)$

$$P(X\geq -1 \mid X\leq 1) = \frac{P(X\geq -1 \text{ και } X\leq 1)}{P(X\leq 1)} = \frac{P(-1\leq X\leq 1)}{P(X\leq 1)}$$

② $P(-1\leq X\leq 1) = F_X(1) - F_X(-1^-) = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

Η σ.π.π τμ X

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0\leq x\leq a \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}, \quad a>0$$

α) $a=?$ β) $F_X=?$ γ) $P(0<X<1/2)$, $P(X\leq 1/4)$

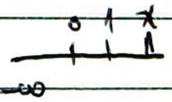
ΛΥΣΗ

α) $1=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_0^a 2x\,dx = [x^2]_0^a = a^2$

$\Rightarrow a=\pm 1 \xRightarrow{a>0} \boxed{a=1}$

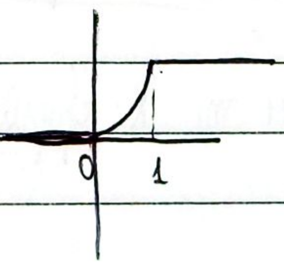
β) $F_X(x) = P(X\leq x),\ \forall x\in\mathbb{R}$

$$= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0, & x<0 \\ \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^x 2t\,dt = x^2, & 0\leq x< a=1 \\ \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^1 f_X(t)dt + \int_1^x = 1, & x\geq a=1 \end{cases}$$



Άρα

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ x^2, & 0\leq x\leq 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$$



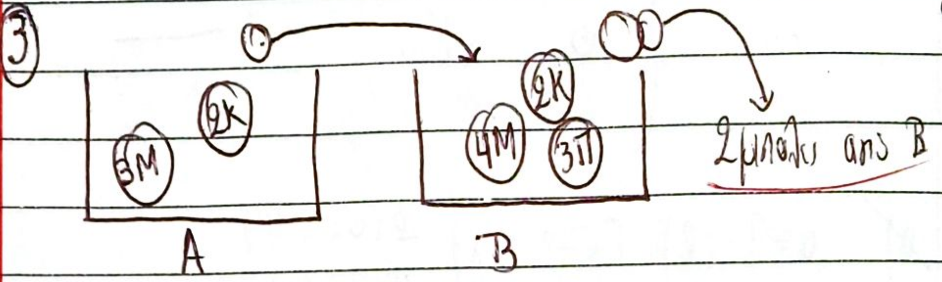
$P(0 < x < 1/2)$

ασκ — σ.π.π

$F_X\left(\frac{1}{2}\right) - F_X(0) = \frac{1}{4}$

$\int_0^{1/2} f_X(x)\,dx = [x^2]_0^{1/2} = 1/4$

3



Ένας παίκτης διαλέγει στην τύχη μια μπάλα από τη κάλπη A και την βάζει μέσα στη B.

Κερδίζει 2 μονάδες για κάθε M
Χάνει 1 μονάδα για κάθε K.
Ούτε Κ ούτε Χ για κάθε Π.

Να υπολογισθεί η κατανομή του κέρδους του παίκτη.

ΛΥΣΗ

Έστω X το κέρδος. Το X είναι τ.μ

Τιμές της X: εξαρτώνται από το τι μπάλες θα βγουν από τη B

Οι δυνατοί συνδυασμοί μπαλών είναι οι εξής:

$K_B K_B, \; K_B \Pi_B, \; \Pi_B \Pi_B, \; M_B K_B, \; M_B \Pi_B, \; M_A M_B$

Τιμές της X: $x = -2, -1, 0, 1, 2, 4$

Ζητώ σ.π της X

$$P_X(-2) = P(X=-2) = P(K_B K_B) \overset{\text{ΘΟΠ}}{=} P(K_B K_B / K_A)\, P(K_A) + P(K_B K_B / M_A)\, P(M_A)$$

$$= \frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} \frac{\binom{2}{1}}{\binom{5}{1}} + \frac{\binom{2}{2}}{\binom{10}{2}} \frac{\binom{1}{1}}{\binom{5}{1}} = \frac{3}{75}$$

Άρα, $P_X(x) = \begin{cases} 3/75, & x=-2 \\ 12/75, & x=-1 \\ 5/75, & x=0 \\ 16/75, & x=1 \\ 25/75, & x=2 \\ 14/75, & x=4 \end{cases}$